Početní část 1 - 15.2.2021

1. Pomocí aritmetiky limit a l'Hospitalova pravidla spočítáme

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x - 3\tan x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} \\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{1-4\cos^2 x}{\cos(x+\frac{\pi}{6})} \\
&= 4\sqrt{3} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{8\sin x \cos x}{-\sin(x+\frac{\pi}{6})} \\
&= 4\sqrt{3} \cdot \frac{8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}}{-1} \\
&= -24.
\end{aligned}
$$

2. $D_f = \mathbb{R}$. Protožę $\lim_{x\to 0} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ není f spojitá v 0, je tedy f spojitá na $D_f \setminus \{0\}$.

Snadno rovněž spočteme, že $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ odtud snadno vidíme, že asymptota v $\pm\infty$ je $y = \frac{\pi}{2}$. Funkce je, sudá protože závisí na x^2 (a není lichá ani periodická).

V dalším kroku si spočítáme

$$f'(x) = \frac{2}{x(\log^2(x^2)+1)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Odtud hned vidíme, že

$$f'(x) > 0 \iff x \in (0,\infty)$$

a

$$f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0).$$

Funkce je tedy rostoucí na $(0,\infty)$ (dokonce i na $[(0,\infty))$), a klesající na $(-\infty,0)$ (dokonce i na $(-\infty,0]$).

Spočteme ještě

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 0$$

a

$$\lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \pm\infty.$$

Pro určení $f'_{\pm}(0)$ nemůžeme použít jednostrannou spojitost v 0, ale z definice snadno vidíme, že $f'_{\pm}(0) = \pm\infty$ (a speciálně, že derivace f v 0 neexistuje).

Bod 0 je tedy bodem lokálního i globálního mimima, bod lokálního (ani globálního) maxima neexistuje.

Obor hodnot je tedy (využíváme spojitost na $(-\infty,0)$ a $(0,\infty)$ monotonii a limity v krajních bodech těchto intervalů) $\{-311\pi\} \cup (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Dále

$$f''(x) = -\frac{2\left(\log^2(x^2) + 4\log(x^2) + 1\right)}{x^2\left(\log^2(x^2)+1\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Platí tedy

$$f''(x) = 0 \iff x = e^{-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$f'' > 0 \text{ na } (-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}),$$

a

$$f'' < 0 \text{ na } (-\infty, -e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, 0) \cup (0, e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}) \cup (e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, \infty).$$

Funkce je tedy konvexní na $(-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, -e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}})$ a $(e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}})$, a konkávní na $(-\infty, -e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}})$, $(-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}, 0)$, $(0, e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}})$ a $(e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}, \infty)$. Inflexní body jsou $-e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $-e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$, $e^{-1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ a $e^{-1+\frac{\sqrt{3}}{2}}$.